

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé



Les **analyseurs** de puissance et d'énergie **Qualistar+** permettent de visualiser instantanément les caractéristiques d'un réseau électrique triphasé.

Les Qualistar+ affichent les signaux de toutes les entrées simultanément. Les mesures s'affichent sous de valeurs, de forme d'ondes, de représentation spectrale ou encore sous la forme d'une représentation de Fresnel.

**Représentation
temporelle**

**Représentation
spectrale**

**Représentation
vectorielle**

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

1. Tensions triphasées

Le transport de l'énergie électrique depuis sa production (source) jusqu'à sa distribution (charge) est réalisé à travers trois fils conducteurs. Ce sont surtout les installations industrielles qui sont alimentées par du courant alternatif triphasé. Un circuit triphasé reçoit trois tensions sinusoïdales de même fréquence.

Une distribution de tensions triphasées (fig. 1) est composée de 3 conducteurs de ligne et (parfois) d'un conducteur dit « de neutre ». Les mesures de tensions s'effectuent alors ainsi :

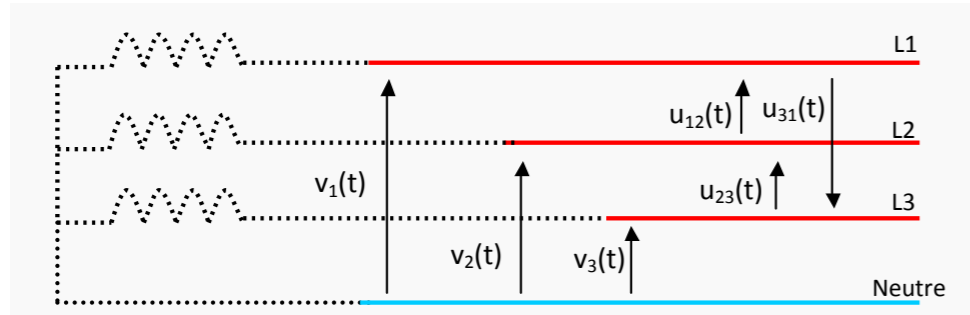


Fig. 1 : distribution triphasée de tensions

A. Equations et propriétés associées

Le système triphasé de tensions représenté par $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ est défini par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_1 \sqrt{2} \sin(\omega.t) \\ v_2(t) &= V_2 \sqrt{2} \sin(\omega.t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3(t) &= V_3 \sqrt{2} \sin(\omega.t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

- En théorie :
- les amplitudes des 3 tensions sont égales,
 - les déphasages respectifs sont égaux (de 120°),
 - les tensions sont parfaitement sinusoïdales.

En pratique, ces propriétés ne sont pas vérifiées. L'importance des défauts peut être quantifiée par des mesures de **taux de déséquilibre et de taux de distorsion harmonique**.

Les tensions $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ sont appelées « tensions simples » ou « tensions phase-neutre ». Les tensions prises entre phases sont dites « tensions composées ». Dans le cas où les systèmes triphasés de tensions simples sont parfaits, les équations de ces tensions composées sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= v_1(t) - v_2(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega.t + \frac{\pi}{6}) \\ u_{23}(t) &= v_2(t) - v_3(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega.t - \frac{\pi}{2}) \\ u_{31}(t) &= v_3(t) - v_1(t) = V \sqrt{2} \sqrt{3} \sin(\omega.t + \frac{5\pi}{6}) \end{aligned}$$

L'amplitude (ainsi que la valeur efficace) des tensions composées est $\sqrt{3}$ fois plus grande que celle des tensions simples. La somme des 3 composantes d'un système triphasé parfait de tensions est égale à 0.

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

B. Représentation temporelle

Le système triphasé de tensions simples (fig. 2) est composé de 3 sinusoïdes de tension qui se succèdent avec un décalage de 6.6 ms. En effet,

$$\begin{aligned} \omega.t_0 &= \frac{2\pi}{3} \\ t_0 &= \frac{2\pi}{3.\omega} = \frac{2\pi}{3.314} = 6,67ms \end{aligned}$$

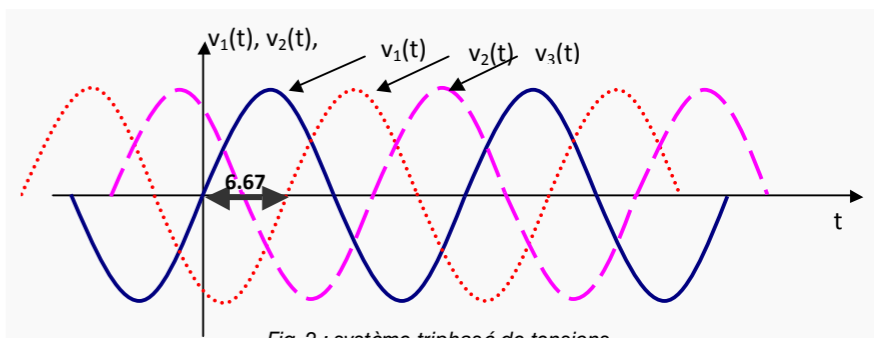


Fig. 2 : système triphasé de tensions

C. Représentation vectorielle

Le système triphasé de tensions simples décrit plus haut peut se représenter dans un plan vectoriel (fig. 3). La longueur des vecteurs correspond à l'amplitude des sinusoïdes qui forment le système. En électrotechnique, ce sont plutôt les valeurs efficaces qui intéressent les utilisateurs, la **représentation vectorielle** du système est très souvent réalisée à partir des valeurs efficaces des fonctions sinusoïdales.

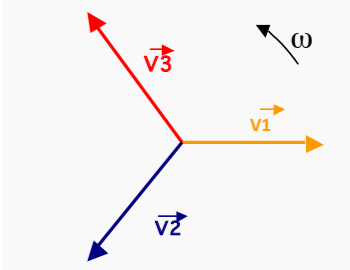


Fig. 3 : représentation vectorielle d'un système triphasé de tensions simples

2. Représentation temporelle des signaux

La **représentation des signaux électriques** est effectuée sur un oscillogramme. Un signal est la variation d'une grandeur électrique analogique (tension ou courant) en fonction du temps. Ces signaux varient de façon continue dans le temps selon une loi mathématique.

Un signal de tension ou de courant (fig. 4) qui évolue en fonction du temps peut être caractérisé par une relation mathématique du type :

$$t \rightarrow x(t)$$

où $x(t)$ représente la valeur du signal pour chaque valeur du temps t qui passe. Il est d'usage de lui donner le nom de **valeur instantanée**.

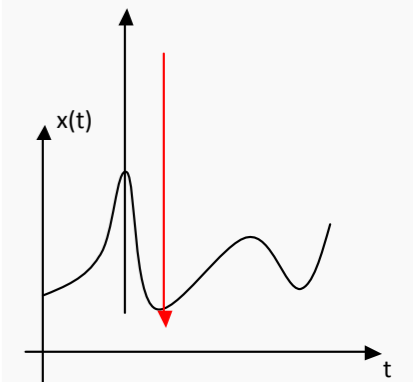


Fig. 4 : signal de tension ou de courant

Propriétés particulières

Signal périodique

Un signal $x(t)$ est **périodique** quand la relation suivante est vérifiée :

$$x(t + T) = x(t)$$

Le signal se reproduit identiquement à lui-même au cours du temps. L'intervalle de temps qui sépare deux instants où le signal reprend exactement les mêmes caractéristiques s'appelle la **période T** (fig. 5).

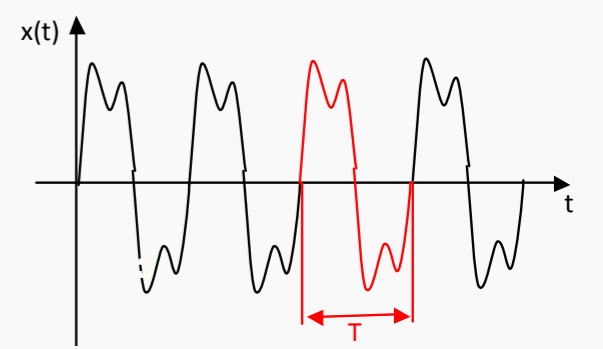


Fig. 5 : signal périodique

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

Série de FOURIER

Lorsque le signal est périodique mais non sinusoïdal et sous réserve de certaines propriétés mathématiques (qui sont en général vérifiées pour les signaux habituellement traités en électrotechnique), il est possible d'obtenir, par une transformation **en série de FOURIER**, une représentation temporelle uniquement composée d'un signal continu et de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de la fréquence du signal de base.

Cette propriété est particulièrement intéressante pour des raisons calculatoires (calcul avec des nombres complexes) et de représentation (**représentation spectrale**).

Cette transformation s'effectue de la manière suivante :

Soit $x(t)$, un signal périodique de période T .

La décomposition en série de FOURIER de $x(t)$ est donnée par la formulation suivante :

$$x(t) = \begin{cases} X_0 + \\ A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \\ B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t \end{cases} \quad \text{avec :}$$

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) dt$$

X_0 est appelé composante continue du signal $x(t)$;

A_n et B_n sont des coefficients qui représentent les amplitudes des harmoniques de rang n du signal $x(t)$.

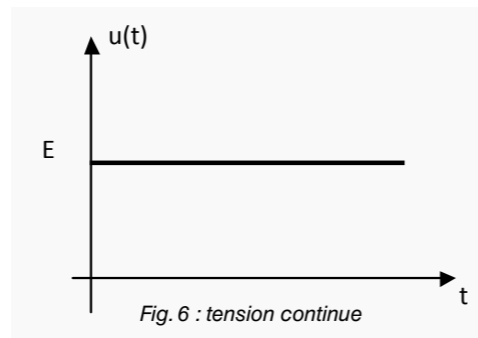
Exemples

Tension continue

$$u(t) = E$$

La tension $u(t)$ (fig. 6) ne varie pas au cours du temps.

Elle n'est pas périodique, elle n'est donc pas décomposable en série de FOURIER.



Courant alternatif sinusoïdal (fig. 7)

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

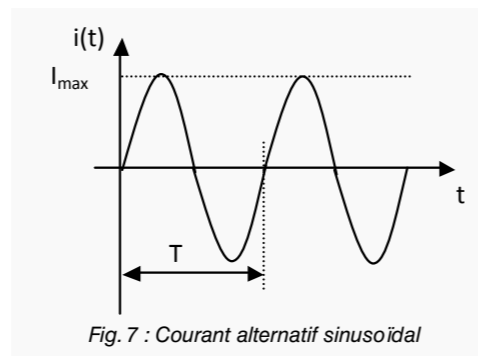
Ce signal est périodique de période T car :

$$i(t) = I_{\max} \sin \omega t$$

$$i(t+T) = I_{\max} \sin[\omega(t+T)] = I_{\max} \sin(\omega t + 2\pi) = I_{\max} \sin \omega t$$

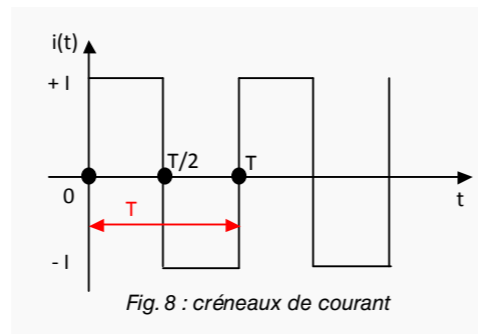
$i(t+T) = i(t)$ ce signal est donc périodique de période T .

Le calcul de la série de FOURIER de ce signal n'est pas utile puisque $i(t)$ est sinusoïdal pur.



Courant en créneaux (fig. 8)

$$\begin{cases} i(t) = I \text{ sur une demi période} \\ i(t) = -I \text{ sur une demi période} \end{cases}$$



Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

Calcul de la série de FOURIER

Calcul de I_0

$$I_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-I) dt \right] = \frac{I}{T} [t_0^{\frac{T}{2}} - t_{\frac{T}{2}}^T]$$

$$I_0 = \frac{I}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right] = 0$$

Le résultat de ce calcul était prévisible compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe du temps du signal $i(t)$.

Calcul des A_n

$$A_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I \cdot \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T I \cdot \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$A_n = \frac{I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[\sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right]$$

$$A_n = \frac{I}{2\pi \cdot n} [\sin(n \cdot \pi) - \sin(0) - \sin(n \cdot 2\pi) + \sin(n \cdot \pi)]$$

$$A_n = 0$$

Calcul des B_n

$$B_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} I \cdot \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T I \cdot \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) dt \right]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot n} \left[-\cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t) \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-\cos(n \cdot \pi) + \cos(0) + \cos(n \cdot 2\pi) - \cos(n \cdot \pi)]$$

$$B_n = \frac{I}{\pi \cdot n} [-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n]$$

$$B_n = \frac{2 \cdot I}{\pi \cdot n} [1 - (-1)^n]$$

Pour n pair, B_n est égal à 0. Pour n impair, B_n s'écrit : $B_n = \frac{4 \cdot I}{\pi n}$

La décomposition du signal $i(t)$ en série de FOURIER s'écrit alors :

$$i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4 \cdot I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ impaire})$$

Remarque importante :

Pour faire le calcul des A_n et des B_n , il peut être judicieux de choisir l'origine des temps de manière à créer des symétries dans la description mathématique du signal. Cette opération peut conduire à un allègement significatif des calculs.

Représentation temporelle

Avec la série calculée précédemment, il est possible de reconstruire le signal original avec plus ou moins de précision.

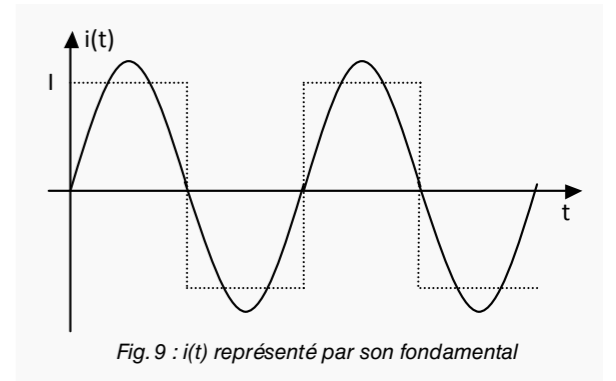
• Avec seulement le premier terme (fig. 9) : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t$

Ce premier terme est aussi appelé le fondamental.

• Avec les deux premiers termes : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t$

• Avec les trois premiers termes : $i(t) = \frac{4 \cdot I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4 \cdot I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4 \cdot I}{5\pi} \sin 5\omega t$

Plus on ajoute de termes de la série, plus le signal recomposé se rapproche du signal original.



Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

3. Représentation vectorielle des signaux

Avec la représentation de Fresnel, nous avons fait apparaître les amplitudes, les phases des signaux. Nous pouvons alors profiter des opérations vectorielles qui sont plus commodes que les opérations sur les fonctions sinus et cosinus. La représentation vectorielle des relations courant-tension en régime sinusoïdal est une manière de ne garder du signal qu'un déphasage et une amplitude. Ce résultat peut aussi être obtenu grâce à l'utilisation de nombres complexes.

D. Correspondance temporelle – vectorielle

La représentation vectorielle n'est possible que pour les signaux sinusoïdaux. On considère le signal sinusoïdal $x(t)$ donné par la relation suivante :

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi)$$

X est l'amplitude du signal sinusoïdal $x(t)$
 ω est la pulsation du signal sinusoïdal $x(t)$
 φ est la phase à l'origine du signal sinusoïdal $x(t)$

Cette représentation est basée sur la correspondance entre un vecteur d'amplitude X et tournant à la vitesse ω autour d'un point d'origine O de ce même signal sur un axe des temps (fig. 10).

φ est la phase à l'origine (pour $t = 0$).
 L'angle parcouru par le vecteur \vec{X} relativement à l'axe d'origine Ox est égal à $(\omega t + \varphi)$.
 La période T est donnée par la relation suivante :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

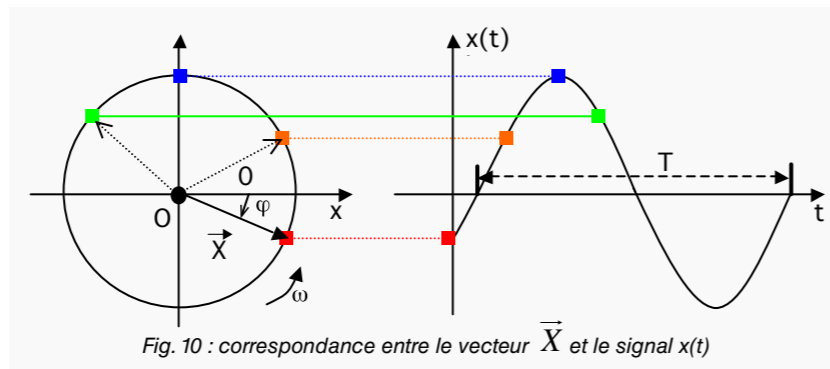


Fig. 10 : correspondance entre le vecteur \vec{X} et le signal $x(t)$

B. Représentation de FRESNEL

Lorsqu'on cherche à étudier des signaux sinusoïdaux (courant et tension) relatifs à un même circuit, il est courant d'utiliser une représentation vectorielle appelée représentation de FRESNEL. Les grandeurs sinusoïdales sont de même pulsation, seules les amplitudes et les phases initiales sont différentes. Une représentation des vecteurs pour un instant donné suffit donc pour traiter les problèmes (fig. 11). On prend, en général, l'origine des temps ($t = 0$).

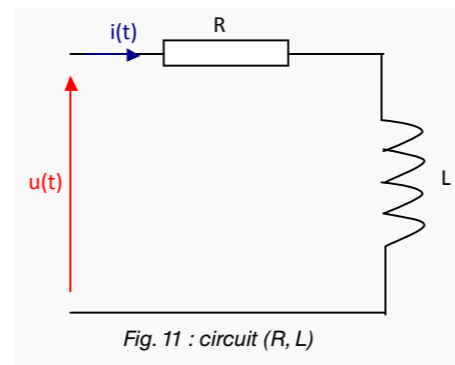


Fig. 11 : circuit (R, L)

Exemple 1 : circuit selfique

$u(t) = U_{\max} \sin \omega t$ en régime permanent, le courant $i(t)$ est égal à :

$$i(t) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Avec une représentation de FRESNEL (fig. 12), la tension et le courant se représentent par les vecteurs \vec{U} et \vec{I} :

Il est à noter que l'angle φ est toujours (par convention) orienté du courant vers la tension.

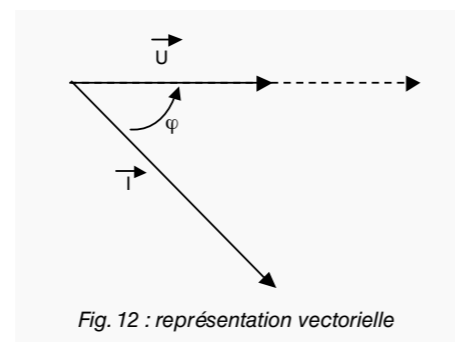


Fig. 12 : représentation vectorielle

Exemple 2 : système triphasé de tensions

Soit le système triphasé de tensions représenté par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= V_{\max} \sin \omega t \\ v_2(t) &= V_{\max} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ v_3(t) &= V_{\max} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

En fig. 3, la représentation vectorielle (de FRESNEL) de ce même système triphasé.

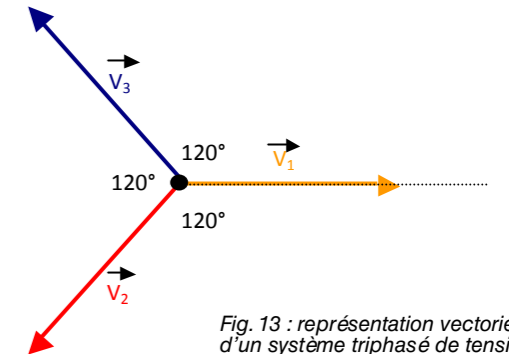


Fig. 13 : représentation vectorielle d'un système triphasé de tension

4. Représentation spectrale des signaux

Un signal non sinusoïdal est plus complexe. Il peut contenir une multitude de fréquences. Son spectre nous renseigne donc sur les différentes composantes fréquentielles qu'il contient. Le spectre d'un signal est la représentation en fonction de la fréquence des amplitudes des différentes composantes présentes dans le signal.

Lorsqu'un signal $x(t)$ est périodique mais non sinusoïdal et sous réserve de certaines propriétés mathématiques (qui sont en général vérifiées pour les signaux habituellement traités en électrotechnique), il est possible d'obtenir, par une transformation en série de FOURIER, une représentation temporelle uniquement composée d'un signal continu et de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence du signal de base.

Cette propriété est particulièrement intéressante pour représenter le signal en faisant ressortir la fréquence et l'amplitude des différentes composantes sinusoïdales données par le calcul de la décomposition en série de FOURIER.

Dans le cas d'un signal sinusoïdal pur (fig. 14) décrit par l'expression suivante :

$$x(t) = X \sin \omega t$$

nous voyons apparaître une amplitude X pour un signal sinusoïdal de pulsation ω (ou de fréquence f).

Ces deux informations, très importantes sur le plan d'une analyse de réseau, peuvent être portées sur un graphique qui porte en ordonnées l'amplitude de la sinusoïde, sa fréquence étant portée sur l'axe des abscisses. Cette représentation graphique liée au signal $x(t)$ est la représentation spectrale du signal $x(t)$ (fig. 15).

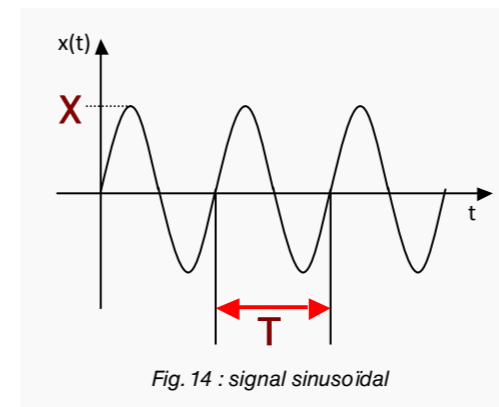


Fig. 14 : signal sinusoïdal

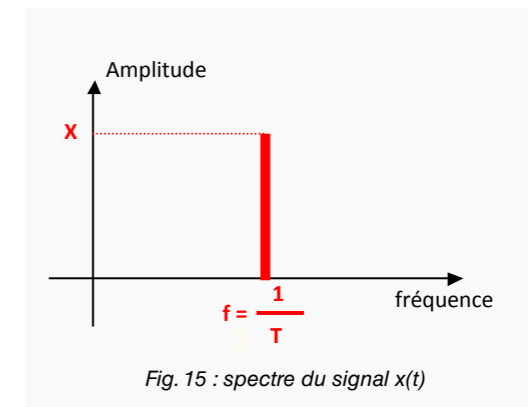


Fig. 15 : spectre du signal $x(t)$

Représentations multiples d'un signal électrique triphasé

Exemple : signal carré

Un courant $i(t)$ est décrit par la relation mathématique suivante :

$$\begin{cases} i(t) = I & \text{sur une demi période} \\ i(t) = -I & \text{sur une demi période} \end{cases}$$

La figure 16 donne une représentation temporelle de $i(t)$.

Le calcul de la série de FOURIER de ce signal $i(t)$ donne l'expression suivante :

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi} \sin \omega t + \frac{4.I}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots + \frac{4.I}{n\pi} \sin n\omega t \quad (n \text{ impaire})$$

Ce signal n'a pas de composante continue, il est composé :

- d'un signal sinusoïdal de fréquence f (celle du signal de base) d'amplitude $\frac{4.I}{\pi}$
- d'un signal sinusoïdal de fréquence $3f$ d'amplitude $\frac{4.I}{3\pi}$
- d'un signal sinusoïdal de fréquence $5f$ d'amplitude $\frac{4.I}{5\pi}$
-

Cette description permet d'établir la représentation spectrale (ou harmonique) suivante (fig. 17) :

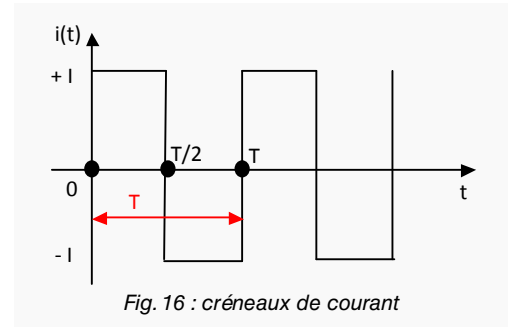


Fig. 16 : créniaux de courant

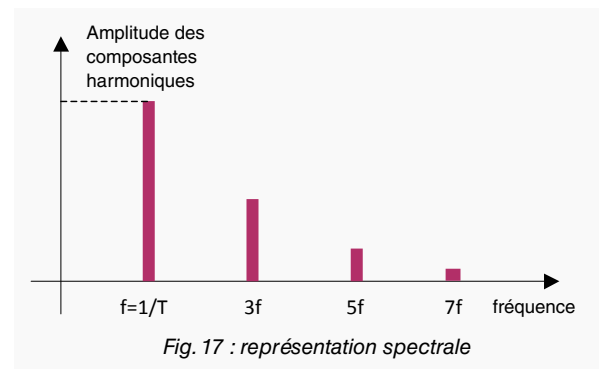
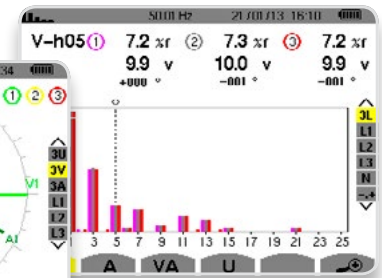
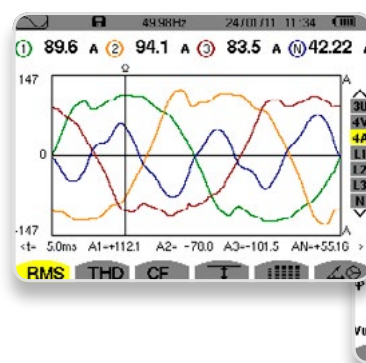


Fig. 17 : représentation spectrale



Les analyseurs de puissance et d'énergie de **la gamme Qualistar+** permettent la visualisation de l'ensemble de ces représentations.

FRANCE
Chauvin Arnoux
 190, rue Championnet
 75876 PARIS Cedex 18
 Tél : +33 1 44 85 44 85
 Fax : +33 1 46 27 73 89
 info@chauvin-arnoux.fr
 www.chauvin-arnoux.fr

INTERNATIONAL
Chauvin Arnoux
 190, rue Championnet
 75876 PARIS Cedex 18
 Tél : +33 1 44 85 44 38
 Fax : +33 1 46 27 95 59
 export@chauvin-arnoux.fr
 www.chauvin-arnoux.com

SUISSE
Chauvin Arnoux AG
 Moosacherstrasse 15
 8804 AU / ZH
 Tél : +41 44 727 75 55
 Fax : +41 44 727 75 56
 info@chauvin-arnoux.ch
 www.chauvin-arnoux.ch

